zad. 1

Nie wprost $W(x) = P(x)Q(x)$, $P, Q \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$

$P(a) = Q(a) = P(b) = Q(b) = 1$, zatem

$(x-a)(x-b) \mid P(x) - 1$ oraz $(x-a)(x-b) \mid Q(x) - 1$,

zatem

$P(x) = (x-a)(x-b)S(x) + 1$, $Q(x) = (x-a)(x-b)T(x) + 1$

$\deg W(x) = 4$, zatem $\deg S(x), \deg T(x) = 1$ i

przyrównując współczynniki ~~przy~~ w $W(x) = P(X)Q(x)$

otrzymujemy $S, T \equiv 1$. To oznacza, że

$$P(x)Q(x) = ((x-a)(x-b)+1)^2 = (x-a)^2(x-b)^2 + 2(x-a)(x-b) + 1$$
$$= (x-a)^2(x-b)^2 + 1 = W(x),$$

ale $2(x-a)(x-b) \not\equiv 0$, sprzeczność

#

zad. 2

$2n$-kąt ma $\frac{2n(2n-3)}{2}$ przekątnych. Liczba przekątnych

równoległych do ustalonego boku to $n-2$.

Zatem przekątnych równoległych do pewnego

boku jest co najwyżej $2n(n-2)$.

$2n(n-2) = 2n^2 - 4n \leq 2n^2 - 3n = n(2n-3)$, zatem na

mocy zasady szufladkowej pewna przekątna nie jest

równoległa do żadnego boku. #

zad. 3 Zauważmy, że $ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - (a^2+b^2)) = \frac{1}{2}((a+b)^2 - 4)$

$$= \frac{1}{2}(a+b+2)(a+b-2)$$

zatem $\frac{ab}{a+b+2} = \frac{a+b-2}{2} = \frac{a+b}{2} - 1$

Wystarczy jeszcze pokazać $a+b \leq 2\sqrt{2}$. Na mocy tw.

Cauchy'ego - Schwarza $(a+b)^2 \leq 2 \cdot (a^2+b^2) = 8$

$$\Updownarrow$$

$$a+b \leq 2\sqrt{2}$$ #