zad. 1

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=y^2$$

$$x(x+3)(x+1)(x+2)=y^2$$

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=y^2 \quad | : 4$$

$$\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)\left(\frac{x^2+3x}{2}+1\right)=\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

to l. naturalne dla dow. $x\in\mathbb{N}$,
$NWD\left(\frac{x^2+3x}{2}, \frac{x^2+3x}{2}+1\right)=1$, zatem liczby te są wzgl. pierwsze.

Ich iloczyn to kwadrat liczby naturalnej, zatem
$\frac{x^2+3x}{2}=u^2$, $\frac{x^2+3x}{2}+1=v^2$, $u,v\in\mathbb{N}$; $v^2-u^2=1$.
Ale ostatnie równanie może być spełnione tylko dla $v=1$, $u=0$, zatem $x^2+3x=0$
$\Rightarrow x=0$ na mocy zał. $x\in\mathbb{N}$.

Podobnie $y=0$.

zad. 2 Podamy dwa rozwiązania

1) Indukcja względem n. Teza: dla ust. $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{A\in\mathcal{A}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}=n$.

1° $n=1$: wtedy $\mathcal{A}=\{\{1\}\}$, $\sum_{A\in\mathcal{A}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}=\prod_{k\in\{1\}}\frac{1}{k}=1$. ✓

2° krok indukcyjny: $n\to n+1$

Oznaczmy $\mathcal{A}_n=P(\{1,2,\dots n\})\setminus\{\emptyset\}$

Zauważmy, że $\mathcal{A}_{n+1}=\{A\subseteq\{1,2,\dots n+1\} : A\neq\emptyset, n+1\notin A\}\ \cup$ ← suma rozłączna
$\{A\subseteq\{1,2,\dots n+1\} : n+1\in A\}=\mathcal{B}_{n+1}$

oraz $\{A\subseteq\{1,2,\dots n+1\} : A\neq\emptyset, n+1\notin A\}=\mathcal{A}_n$, stąd

$$\sum_{A\in\mathcal{A}_{n+1}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}=\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}+\sum_{A\in\mathcal{B}_{n+1}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}=n+\sum_{A\in\mathcal{B}_{n+1}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k}$$

na mocy zał. ind.

Ale zauważymy, że $\forall B\in\mathcal{B}_{n+1}\ \ B\setminus\{n+1\}\in\mathcal{A}_n$. Stąd

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_{n+1}}\prod_{k\in B}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{A\in\mathcal{A}_n}\prod_{k\in A}\frac{1}{k} + \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\{n+1\}^*} \underset{\text{zał. ind.}}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1} = 1.$$

#

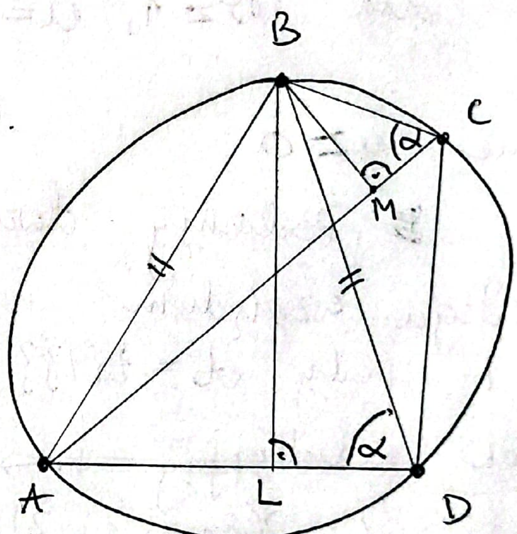
2) Zauważyć, że

$$\cancel{\sum_{A\in\mathcal{A}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k} = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{n}{n-1}\right) = n}$$

$$\sum_{A\in\mathcal{A}}\prod_{k\in A}\frac{1}{k} = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)(\dots)\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$
$$= \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{n+1}{n}\right)-1$$
$$= n.$$

#

zad. 3



Niech L: rzut prosty B na AD. Trójkąty BDL i BCM są podobne, zatem

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|DL|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|AD|}{|CM|},\ \text{stąd}$$

$$2|CM| = \frac{|AD|}{|BD|}\cdot|BC|. \quad (☆)$$

Twierdzenie Ptolemeusza (?) mówi nam, że

$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|$, tzn.

$$|AC| = |CD|\cdot\frac{|AB|}{|BD|} + |BC|\cdot\frac{|AD|}{|BD|} \underset{(☆)}{=} |CD|\cdot\frac{|AB|}{|BD|} + 2|CM| \underset{ABD\ \text{równoram.}}{=}$$

$= |CD| + 2|CM|$. Ale $|AC| = |AM| + |MC|$

Zatem

$$|AM| + |MC| = |CD| + 2|CM|$$
$$|AM| = \underset{|DC|}{\underset{\shortparallel}{|CD|}} + |CM|$$

#