Wrocław, 23.11.2024r.

# Lista 5. - ciągi

**1.** Obliczyć sumę

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2).$$

[1]

**2.** Znaleźć wzór wyrażający sumę

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$$

w zależności od $n$.[2]

**3.** Dowieść, że jeżeli $k$ jest liczbą naturalną, to

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^k}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m,$$

gdzie $m$ jest liczbą naturalną zależną od $k$; wyznaczyć $m$. [3]

**4.** Dowieść, że dla każdego $k$, $k$-te od końca cyfry w układzie dziesiętnym liczb $5, 5^2, 5^3, \ldots$ tworzą od pewnego miejsca ciąg okresowy. [4]

**5.** Udowodnić, że wszystkie wyrazy ciągu $x_0, x_1 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$ są kwadratami liczb całkowitych.

**6.** Dowieść, że jeżeli $a_0 = \frac{1}{2}$ oraz $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{n}$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. [5]

**7.** Udowodnić, że jeżeli liczby $p, q, r$ są różnymi liczbami pierwszymi, to $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ nie mogą być wyrazami tego samego ciągu arytmetycznego.

**8.** Niech $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$. Udowodnić, że dla dowolnego $n > 1$ naturalnego zachodzi $\sum_{i=1}^n x_i < \sqrt{n}$.

**9.** Ciąg $a_n$ liczb dodatnich spełnia warunek $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ dla każdego $n$ naturalnego dodatniego. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej $a_n \leq \frac{1}{n}$.

---

[1] *Wskazówka:* Rozbić sumę na kilka prostrzych sum.
[2] *Wskazówka:* Ciąg geometryczny.
[3] *Wskazówka:* Indukcja.
[4] *Wskazówka:* Działania modulo.
[5] *Wskazówka:* $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1$.