

Lista 4. - wielomiany

1. Niech $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$ dla pewnego wielomianu unormowanego P . Wylczyć $P(-8) + P(12)$. ¹
2. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Niech $P(P(\dots P(k)\dots)) = k$ dla pewnej liczby całkowitej k (gdzie funkcja wielomianowa jest z sobą złożona l razy). Udowodnić, że $P(P(k)) = k$. ²
3. Udowodnić, że jeżeli wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełnia

$$P(\sin x) = P(\cos x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to istnieje wielomian $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych taki że $P(x) = Q(x^4 - x^2)$. ³

4. Czy istnieje wielomian P o współczynnikach całkowitych taki, że istnieją parami różne liczby całkowite a, b, c takie że

$$P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a?$$

⁴

5. Udowodnić, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu

$$x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \dots$$

mogą być rzeczywiste. ⁵

6. Niech wielomiany P, Q, R, S spełniają równość

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Udowodnić, że $P(1) = 0$. ⁶

7. Udowodnić, że jeżeli P, Q są unormowanymi wielomianami spełniającymi $P(P(x)) = Q(Q(x))$, to $P = Q$.

¹ Wskazówka: Interpolacja.

² Wskazówka: Rozważyć ciąg $k_0 = k$, $k_{i+1} = P(k_i)$.

³ Wskazówka: Skorzystać z parzystości funkcji $\sin x$.

⁴ Wskazówka: Zasada maksimum.

⁵ Wskazówka: Wzory Viete'a.

⁶ Wskazówka: Przypomnieć sobie jaką postać mają pierwiastki wielomianu $x^5 - 1$.