Wrocław, 26.10.2024r.

Lista 3. - geometria

1. Dowieść, że jeżeli każdy bok trójkąta jest mniejszy niż 1, to jego pole jest mniejsze niż $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że
$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że
$$PQ^2 = PB^2 + QC^2.$$

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz
$$\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle E = \measuredangle B + \measuredangle D + \measuredangle F.$$
Udowodnić, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

5. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności: Każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości
$$\measuredangle ADB = 2\measuredangle ACB \text{ oraz } \measuredangle BDC = 2\measuredangle BAC.$$
Udowodnić, że $AD = CD$.

7. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P, a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktów D i A. Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o, który nie zawiera punktów B i C. Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN.

8. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że
$$AD \geq BK + CL.$$

9. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL, punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

10. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\measuredangle DAP = \measuredangle BAC$.