Wrocław, 19.10.2024r.

Lista 2. - teoria liczb

1. Dla jakich n naturalnych $120|n^5 - n$?

2. Ile jest zer na końcu zapisu dziesiętnego liczby 1000!?

3. Udowodnić, że jeżeli n ma nieparzysty dzielnik, to $2^n + 1$ nie jest pierwsza.

4. Czy liczba składająca się w swoim zapisie dziesiętnym z dokładnie 600 szóstek oraz pewnej liczby zer może być kwadratem liczby całkowitej?

5. Udowodnić małe twierdzenie Fermata: jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz a jest liczbą całkowitą, to $p|a^p - a$.[1]

6. Udowodnić, że $2^n \nmid n!$ dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n.

7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1 liczba $n^4 + 4^n$ nie jest pierwsza.

8. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1 liczba $n^5 + n^4 + 1$ nie jest pierwsza.

9. Udowodnić, że jeżeli n jest sumą dwóch kwadatów, to $2n$ też.

10. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leq d \leq \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

11. Czy równanie $15x^2 - 7y^2 = 9$ ma rozwiązania całkowite? Jeśli tak znaleźć je wszystkie.

12. Czy równanie $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ ma rozwiązania całkowite? Jeśli tak znaleźć je wszystkie.

13. Udowodnić, że jeżeli $2n + 1$ oraz $3n + 1$ są kwadratami dla pewnej liczby naturalnej n, to $40|n$.

14. Udowodnić, że nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych $W(x)$, taki że $W(7) = 11$, $W(11) = 13$.

15. Niech α, β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi takimi że $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Udowodnić, że ciągi $a_n = \lfloor n\alpha \rfloor$, $b_n = \lfloor n\beta \rfloor$ są rozłączne oraz sumują się do $\mathbb{N}_+$.

16. (trudne) Niech

$$S(m, n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m + k}.$$

Udowodnić, że $S(m, n)$ nie jest całkowite dla żadnych dodatnich liczb całkowitych m, n.

---

[1] *Uwaga:* Implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Kontrprzykład: $341|2^{341} - 2$.