

Lista 1. - równania i układy równań

1. Rozwiązać równanie

$$\left| \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}.$$

2. Rozwiązać równanie

$$x = \sqrt{b-x}\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x}\sqrt{b-x},$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami dodatnimi.

3. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

4. Dowieść, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to dla pewnej liczby naturalnej m zachodzi równość

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}.$$

5. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} |x + y| = 1 \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

6. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y. \end{cases}$$

7. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} xy = ax + by \\ yz = ay + bz \\ zx = az + bx. \end{cases}$$

8. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} xy(x-y) = ab(a-b) \\ x^3 - y^3 = a^3 - b^3. \end{cases}$$

9. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_2x_3 = 2 \\ x_3x_4 = 3 \\ \dots \\ x_nx_1 = n. \end{cases}$$

10. Rozwiązać w liczbach wymiernych układ równań

$$\begin{cases} 2xy = t^2 - w^2 + z^2 \\ 2xz = t^2 - y^2 + w^2 \\ 2yz = t^2 - w^2 + r^2. \end{cases}$$