Wrocław, 08.10.2024r.

Lista 0. - rozgrzewkowa

1. Niech a będzie niezerową liczbą rzeczywistą, taką że $a + \frac{1}{a}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n, $a^n + \frac{1}{a^n}$ jest liczbą całkowitą.

2. Udowodnić, że jeżeli $s_1s_2s_3s_4 + s_2s_3s_4s_5 + \cdots + s_ns_1s_2s_3 = 0$ dla $s_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \ldots n$, to $4|n$.

3. Niech $x_1, x_2, \ldots x_n$ będą takimi punktami na płaszczyźnie, że dowolne 3 z nich tworzą trójkąt o polu ≤ 1. Uzasadnić, że wszystkie te punkty leżą w pewnym trójkącie o polu ≤ 4.

4. Dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $n = 2^k$ udowodnić, że spośród $2n - 1$ dodatnich liczb całkowitych można wybrać n w taki sposób, żeby ich suma była podzielna przez n.

5. Ile jest słów binarnych długości n, w których podsłowo 01 występuje dokładnie m razy?

6. Udowodnić, że jeżeli n nie jest pierwsza, to $2^n - 1$ nie jest pierwsza.

7. Znaleźć wszystkie całkowite rozwiązania równania $x^2 - 3y^2 = 17$.

8. Wykazać nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$$

dla $a, b, c, d > 0$.

9. Niech $W(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Udowodnić, że jeżeli $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $W(a) = W(b) = W(c) = -1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

10. W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1, leży czworokąt wypukły o polu większym niż $\frac{1}{2}$. Udowodnić, że da się wpisać w ten czworokąt odcinek długości $\frac{1}{2}$ równoległy do boku AB.

11. W trójkącie ABC przez punkt wewnętrzny P poprowadzono proste CP, AP, BP przecinające boki AB, BC, CA odpowiednio w punktach K, L, M. Udowodnić, że jeśli w czworokąty $AKPM$ i $KBLP$ można wpisać koła, to w czworokąt $LCMP$ też można wpisać koło.

12. Dowieść, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ krawędzie przeciwległe są równe, tj. $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, to proste przechodzące przez środki krawędzi przeciwległych są wzajemnie prostopadłe i są osiami symetrii czworościanu.