

Zadania z kółka matematycznego

Filip Rabiega

7 października 2025

1. Udowodnić, że dla każdej liczby nieparzystej $n > 1$ istnieje taka liczba naturalna $d > 0$, że

$$n \mid 2^d - 1.$$

2. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają równanie $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Niech m będzie najmniejszą z tych liczb, a M – największą. Dowieść, że

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM.$$

3. Udowodnić, że wśród 5 odcinków otwartych leżących na jednej prostej są 3 odcinki mające punkt wspólny lub 3 odcinki parami rozłączne.